Równania Eulera rzędu drugiego

Definicja 1. Równanie różniczkowe postaci
$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \tag{1}$$
gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$, nazywamy *równaniem różniczkowym Eulera rzędu drugiego*.

Rozwiązania równania Eulera na przedziale $X = (0, +\infty)$ szukamy w postaci
$$y = x^{\lambda}, \tag{2}$$
gdzie λ jest nieznaną liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Obliczając pierwszą i drugą pochodną funkcji (2) mamy
$$y' = \lambda x^{\lambda-1},$$
$$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}.$$
Podstawiając te funkcje do równania (1) otrzymamy równanie
$$a\lambda(\lambda-1)x^2x^{\lambda-2} + b\lambda x x^{\lambda-1} + cx^{\lambda} = 0.$$
Dzieląc przez funkcje x^{λ} otrzymamy równanie charakterystyczne dla równania (1) postaci
$$a\lambda^2 + (b-a)\lambda + c = 0. \tag{3}$$
W zależności od wartości wyróżnika
$$\Delta = (b-a)^2 - 4ac$$
otrzymamy trzy typy pierwiastków λ_1 i λ_2 równania kwadratowego (3), a więc mamy trzy przypadki:

Przypadek 1. Wyróżnik $\Delta > 0$**.** Wtedy mamy dwa różne pierwiastki rzeczywiste
$$\lambda_1 \neq \lambda_2.$$
Zatem funkcje
$$\varphi_1(x) = x^{\lambda_1}, \quad \varphi_2(x) = x^{\lambda_2}$$
są rozwiązaniami równania (1). Ponieważ wrońskian dla powyższych rozwiązań
$$W(x) = \begin{vmatrix} x^{\lambda_1} & x^{\lambda_2} \\ \lambda_1 x^{\lambda_1 - 1} & \lambda_2 x^{\lambda_2 - 1} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)x^{\lambda_1 + \lambda_2 - 1} \neq 0$$
dla każdego $x \in (0, +\infty)$, więc funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ stanowią układ fundamentalny tego równania i rozwiązanie ogólne równania (1) ma postać
$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2},$$
gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przykład 1. Rozwiązać równanie
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$
Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne dla danego równania Eulera ma postać
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$
Zatem $\Delta = 1$ i mamy dwa pierwiastki

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 .$$

Tak więc szukane rozwiązanie ogólne danego równania ma postać

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 ,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przypadek 2. Wyróżnik $\Delta = 0$**.** Wtedy mamy jeden dwukrotny pierwiastek rzeczywisty

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 .$$

Zatem funkcja

$$\varphi_1(x) = x^{\lambda}$$

jest rozwiązaniem równania (1). Łatwo można sprawdzić, że funkcja

$$\varphi_2(x) = x^{\lambda} \ln x$$

również będzie rozwiązaniem równania (1). Ponadto wrońskian danych funkcji spełnia dla każdego $x \in (0, +\infty)$ warunek

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^{\lambda} & x^{\lambda} \ln x \\ \lambda x^{\lambda-1} & \lambda x^{\lambda-1} \ln x + x^{\lambda-1} \end{vmatrix} = x^{2\lambda-1} \neq 0 .$$

To oznacza, że podane funkcje $\varphi_1(x), \ \varphi_2(x)$ tworzą układ fundamentalny. Zatem rozwiązanie ogólne równania (1) w tym przypadku ma postać

$$y = C_1 x^{\lambda} + C_2 x^{\lambda} \ln x ,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0 .$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne dla danego równania Eulera ma postać

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 .$$

Zatem $\Delta = 0$ i mamy

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 .$$

Tak więc funkcja

$$y = x^{-1}\left(C_1 + C_2 \ln x\right)$$

jest rozwiązaniem ogólnym danego równania.

Przypadek 3. Wyróżnik $\Delta < 0$**.** Wtedy pierwiastki λ_1 i λ_2 są liczbami zespolonymi sprzężonymi:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0 .$$

Podstawiając λ_1 i λ_2 do wzoru (2) otrzymamy rozwiązania zespolone równania (1) postaci

$$y_1 = x^{\alpha + i\beta}, \quad y_2 = x^{\alpha - i\beta} .$$

Na podstawie wzoru Eulera funkcję y_1 możemy przepisać w postaci

$$y_1 = x^{\alpha + i\beta} = x^{\alpha} x^{i\beta} = x^{\alpha} \, \mathrm{e}^{i\beta \ln x} = x^{\alpha}\left(\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)\right) .$$

Niech

$$\varphi_1(x) = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x), \qquad \varphi_2(x) = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) .$$

Podobnie jak w przypadku równania liniowego jednorodnego o współczynnikach stałych funkcje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są rozwiązaniami równania Eulera (1). Ponieważ

$$\varphi_1'(x) = x^{\alpha-1}\left(\alpha\cos(\beta\ln x) - \beta\sin(\beta\ln x)\right),$$

$$\varphi_2'(x) = x^{\alpha-1}\left(\alpha\sin(\beta\ln x) + \beta\cos(\beta\ln x)\right),$$

więc łatwo sprawdzić, że dla każdego $x \in (0, +\infty)$ wrońskian danych funkcji spełnia warunek

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0.$$

To oznacza, że funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ stanowią układ fundamentalny i rozwiązanie ogólne równania (1) ma postać

$$y = x^{\alpha}\left(C_1\cos(\beta\ln x) + C_2\sin(\beta\ln x)\right),$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Przykład 3. Rozwiązać równanie

$$x^2y'' + xy' + 4y = 0.$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne dla danego równania Eulera ma postać

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Zatem $\Delta = -16$ i mamy

$$\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i.$$

Stąd $\alpha = 0, \quad \beta = 2$. Tak więc funkcja

$$y = C_1\cos(2\ln x) + C_2\sin(2\ln x),$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi, jest rozwiązaniem ogólnym danego równania.

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego Eulera (1) również można znaleźć stosując podstawienie

$$x = \mathrm{e}^t \tag{4}$$

gdy $x \in (0, +\infty)$. Za pomocą podstawienia (4) równanie Eulera sprowadza się do równania różniczkowego liniowego o współczynnikach stałych. Ponieważ po wprowadzeniu nowej zmiennej niewiadoma funkcja $y(x)$ jest funkcją złożoną, więc różniczkując względem t otrzymamy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\mathrm{e}^t.$$

Stąd

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\mathrm{e}^{-t}.$$

Zatem

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^t + \frac{dy}{dx}\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^{2t}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dt}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{e}^t.$$

Stąd

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Podstawiając otrzymane pochodne oraz (4) do równania Eulera (1) dostajemy równanie różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych postaci

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=0. \tag{5}$$

Zaznaczmy, że jeżeli $x\in(-\infty,\ 0)$, to stosujemy podstawienie postaci

$$x=-\mathrm{e}^t .$$

Zauważmy również, że za pomocą podstawienia (4) rozwiązujemy *niejednorodne równanie Eulera,* tzn. równanie postaci

$$ax^2y''+bxy'+cy=f(x) .$$

Przykład 4. Rozwiązać niejednorodne równanie Eulera

$$x^2y''+xy'+4y=10x, \qquad x\in(0,+\infty) . \tag{6}$$

Rozwiązanie. Mamy tu

$$a=1,\quad b=1,\quad f(x)=10x .$$

Stosując podstawienie (4) sprowadzamy dane równanie do postaci (5):

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4y=10\mathrm{e}^t . \tag{7}$$

Równanie (7) jest równaniem liniowym niejednorodnym rzędu drugiego o współczynnikach stałych. Zatem równanie charakterystyczne dla powyższego równania ma postać

$$\lambda^2+4=0 .$$

Stąd mamy pierwiastki zespolone

$$\lambda_1=2i,\quad \lambda_2=-2i .$$

Wtedy $\alpha=0,\ \ \beta=2$. Tak więc rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4y=0$$

dane jest funkcją

$$y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t ,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi. Rozwiązania szczególnego równania (7) szukamy w postaci prawej strony równania, mianowicie

$$\psi(x)=A\mathrm{e}^t .$$

Ponieważ

$$\psi'(x)=\psi''(x)=\psi(x)=A\mathrm{e}^t ,$$

więc podstawiając do równania niejednorodnego mamy

$$5Ae^t=10\mathrm{e}^t .$$

Stąd

$$A=2 .$$

Zatem rozwiązanie ogólne równania (7) ma postać

$$y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+2\mathrm{e}^t .$$

Ponieważ

$$t=\ln x ,$$

więc powracając do zmiennej x otrzymamy szukane rozwiązanie ogólne równania (6) postaci

$$y=C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)+2x ,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać podane równania różniczkowe Eulera:

1. $x^2 y'' + xy' - y = 0$;
2. $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$;
3. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$;
4. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$;
5. $x^2 y'' + 3xy' + 10y = 0$;
6. $2x^2 y'' - 3xy' + 2y = 0$;
7. $x^2 y'' + xy' - y = x^2$;
8. $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$;
9. $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$;
10. $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$;
11. $x^2 y'' - 2xy = 6\ln x$;
12. $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch